

練習問題 1

東京から地球の裏側まで中心を通るまっすぐな穴を掘ったとする．その穴に質量 m のボールを初速度 0 で落とす．地球を一様な密度 ρ の球体と仮定し，以下の問いに答えよ．

- (i) 地球の中心からボールまでの距離を r としたとき，ボールに加わる力を求めよ（空気抵抗、摩擦抵抗やボールの大きさなどは考えないとする．）
- (ii) ボールに対する運動方程式を書き，どのような運動をするか調べよ．
- (iii) ボールは何時間で元の位置に戻ってくるか数値で答えよ．
- (iv) 東京からロンドンまで直線的に穴を掘り，同様にボールを落とした場合，何時間でボールはロンドンに到達するか数値で答えよ．

練習問題 1 の略解

- (i) 万有引力の法則とクーロン力の法則を比較すると、質量と電荷、重力場と電場、 G と $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ の読み替えのもとに両者は同一である。このことを用いると、求める力の大きさを $F(r)$ としたとき（電磁気で今頃習っていると思われる）ガウスの法則から

$$4\pi r^2 \left(\frac{F(r)}{m} \right) = 4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

よって

$$F(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho m r$$

- (ii) 運動方程式は (i) の結果から

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho m r$$

したがってボールの運動は単振動となる。

- (iii) ボールの周期は

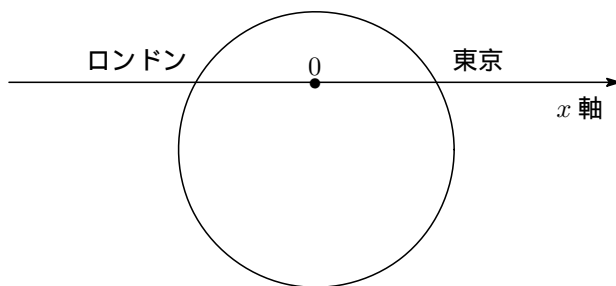
$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 3.14}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.52 \times 10^3}} = 5.058 \times 10^3 \text{ s}$$

つまり約 1 時間 24 分で戻ってくる。

- (iv) 下の図のように東京とロンドンを結ぶ直線を x 軸とし、原点を東京とロンドンの中心にとる。この原点からボールまでの距離を x とすると、ボールに加わる力の x 成分は $-F(r)x/r$ となる。したがって運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho m x$$

この運動方程式は (ii) と同じ形なので周期も上の場合に等しい。したがってロンドンまで (iii) の半分の時間、約 42 分で到達する。



(iv) によればトンネルの出口はロンドンに限らず地球上のどこでも（どんなに近くても！）周期は同じ。つまり原理的には地球上のどこにでも 42 分でいける列車が作れることになる。なお、(iii) で求めたボールの周期は、地表すれすれを万有引力で等速円運動する質点が地球を一周するのに要する時間に等しい。興味のある人は原点 O での列車の速さを求めてみよう。（This is a classic exercise.）