

練習問題 9

$x = 0$ と $x = l$ の両端が固定された 1 次元の弦について、初期条件

$$u(x, 0) = h(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = w(x) \quad (1)$$

を満たすものを求めよう。ただし $h(x), w(x)$ は $0 \leq x \leq l$ で定義された関数で、そのフーリエ級数展開は

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2)$$

で与えられているとする。 ($h(0) = h(l) = 0, w(0) = w(l) = 0$)

- (i) c_n, d_n を用いて $u(x, t)$ のフーリエ級数解を求めよ。
- (ii) ダランベールの解を求めよ。
- (iii) (i) と (ii) の関係を説明せよ。

解答例

(i) 題意の境界条件のもとでは $u(x, t)$ のフーリエ級数解を

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

とおくことができる。ここで $b_n(t)$ は波動方程式の帰結として

$$\ddot{b}_n(t) + \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 b_n(t) = 0 \quad (4)$$

を満たす。初期条件については (1), (2) から

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n(0) - c_n) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{b}_n(0) - d_n) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0. \quad (5)$$

直交性 $\int_{-l}^l \sin(m\pi x/l) \sin(n\pi x/l) dx = l\delta_{m,n}$ と (5) から $b_n(0) = c_n, \dot{b}_n(0) = d_n$ が従う。(4) の解でこれを満たすものは

$$b_n(t) = c_n \cos \frac{n\pi vt}{l} + \frac{ld_n}{n\pi v} \sin \frac{n\pi vt}{l}. \quad (6)$$

これを (3) に代入してフーリエ級数解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\pi vt}{l} + \frac{ld_n}{n\pi v} \sin \frac{n\pi vt}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (7)$$

を得る.

(ii) ダランベールの解で $u(0, t) = u(l, t) = 0$ を満たすものは

$$u(x, t) = g(x - vt) - g(-x - vt) \quad (8)$$

と書けて, $g(x)$ は周期 $2l$ の周期関数 $g(x + 2l) = g(x)$ であった. (8) を (1) に代入して

$$g(x) - g(-x) = h(x), \quad -vg'(x) + vg'(-x) = w(x). \quad (9)$$

これを解けば

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(h(x) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^x w(y) dy \right) \quad (10)$$

となる. x_0 は任意定数であるが, これは (8) における差をとるとキャンセルするので $u(x, t)$ は x_0 によらず一意的に決定される.

(iii) フーリエ級数解 (7) とダランベールの解 (8,10) が一致していることを示そう.

(2) を (10) に代入し, 項別に積分を実行することにより, ダランベールの解に登場する関数 $g(x)$ のフーリエ級数展開:

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ld_n}{n\pi v} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (11)$$

が得られる. ただし, x_0 を $\cos(n\pi x_0/l) = 0$ となる様にとった. (そうとらなくても以下の議論はほとんど本質的に同じ.) (11) を (8) に代入し,

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{n\pi}{l}(x - vt) - \sin \frac{n\pi}{l}(-x - vt) \right), \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{n\pi}{l}(x - vt) - \cos \frac{n\pi}{l}(-x - vt) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

を適用すれば (7) と一致することがわかる. いいかえれば, フーリエ級数解 (7) に三角関数の公式 (12) を適用すれば (8) のようにダランベールの解のように右向きと左向き進行波に分解されたものになる. その際 $g(x)$ のフーリエ級数展開 (11) も得られる.