

練習問題 2

[1] 質量 m の子供が長さ l のロープに吊るされたブランコに座っている．子供は十分小さいとして大きさは無視しよう．母親が角度 1 ラジアンだけ引き上げて静止させ，その後，常にブランコの振れる方向にそって mg の大きさの力で押して鉛直になった瞬間に手を放した．

- (i) ロープの振れ角 θ の従う微分方程式を導け．
- (ii) 母親がブランコを押していた時間を求めよ．ただし $\sin \theta = \theta$ という近似を用いてよい．

[2] 質量 0.2 kg の物体がばね定数 80 N/m のばねにつり下げられている．この物体には $-bv$ で表される抵抗が働いている．ここで v は m/s の単位で表した速度である．

- (i) この系の運動方程式を書け．
- (ii) 減衰がある場合の振動数が，減衰のない場合の振動数の $\sqrt{99}/10$ 倍であった．このとき定数 b の値を求めよ．
- (iii) 5 回振動したあと，振幅はどれだけ減少するか．

解答例

[1]

(i) プランコの描く円弧の接線方向の加速度は $l \frac{d^2\theta}{dt^2}$ なので

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg - mg \sin \theta. \quad (1)$$

(ii) $\sin \theta = \theta$ と近似し, $\omega = \sqrt{l/g}$ と書くと, (1) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0. \quad (2)$$

$\phi = \theta + 1$ とおけば ϕ は単振動の方程式 $\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$ を満たすので一般解は $\phi = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.
従って $\theta = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - 1$. 初期条件 $\theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = 0$ を課すと $A = 2, B = 0$. よって

$$\theta = 2 \cos(\omega t) - 1. \quad (3)$$

$\theta = 0$ となるのは $\cos(\omega t_1) = \frac{1}{2}$. 従って母親が押していた時間は

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

となり, これは周期の $\frac{1}{6}$ である.

[2] (i) 運動方程式は

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -80x - b \frac{dx}{dt}$$

(ii) 上の式を

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

の形に書くと $\gamma = 5b$, $\omega_0 = 20$ であり, (5) の一般解は

$$x = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (6)$$

である. $\omega = \frac{\sqrt{99}}{10} \omega_0$ より $\gamma = \frac{\omega_0}{5}$. 従って $b = 0.8 \text{ Ns/m}$.

(ii) 無次元の量 $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} (= 5)$ を導入しよう. 振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

なので n 回振動したあとの振幅は (6) により

$$A \exp\left(-\frac{n\gamma T}{2}\right) = A \exp\left(-\frac{\pi n}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}\right).$$

これは Q が十分大きいときには $A \exp(-n\frac{\pi}{Q})$ と簡単になる. つまり 1 回振動するごとに振幅は $\exp(-\frac{\pi}{Q})$ 倍なる. 今の場合 $Q = 5, n = 5$ を代入して初期振幅 A の約 $\exp(-\pi) = 0.04$ 倍になることがわかる.

一般に Q が大きい場合には振幅が初期振幅の $\exp(-\pi)$ 倍になるまでに減衰的に振動する回数が $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ である. Q が大きいほどエネルギー散逸は小さい.

周期的外力のかかった振動子には共鳴という現象が見られるが, その際 Q は共鳴の鋭さを表す指標として再登場する.