

練習問題 3

関数 $f(t)$ で表される一般の外力のもとでの強制振動の式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t) \quad (1)$$

の特殊解を求めよ.

練習問題 3 の略解

斉次方程式 ((1) で $f = 0$ の場合) の独立な解を x_1, x_2 としよう. その一般解は C_1, C_2 を定数として

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (2)$$

と与えられる. 非斉次方程式 (1) の場合には、(2) の C_1, C_2 を t の適当な関数に選ぶことにより特殊解をつくる手法 (定数変化法) がある. 以下それを紹介する. (2) で C_1, C_2 が t の関数であるとする

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \frac{dx_1}{dt} + C_2 \frac{dx_2}{dt} + x_1 \frac{dC_1}{dt} + x_2 \frac{dC_2}{dt}$$

C_1 と C_2 間には

$$x_1 \frac{dC_1}{dt} + x_2 \frac{dC_2}{dt} = 0 \quad (3)$$

という関係を課しておく. すると

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = C_1 \frac{dx_1}{dt} + C_2 \frac{dx_2}{dt}, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = C_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + C_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dC_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} \end{cases}$$

である. これらを非斉次方程式に代入し, x_1 および x_2 が斉次方程式の解であることを使えば

$$\frac{dC_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} = f(t) \quad (4)$$

を得る. (3) と (4) から

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -\frac{f(t)x_2}{W}, \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{f(t)x_1}{W} \end{cases} \quad (5)$$

ここで W は

$$W = x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}$$

を意味する. なお W は x_1 と x_2 が線形独立なので 0 でない. (どうしてそう主張できるか考えよ.) (5) を積分し (2) に代入すれば

$$x(t) = -x_1(t) \int \frac{f(s)x_2(s)}{W(s)} ds + x_2(t) \int \frac{f(s)x_1(s)}{W(s)} ds \quad (6)$$

となる. これは非斉次方程式の特殊解である. 積分の下限はどう選んでもよく、その不定性は斉次方程式の一般解の自由度に吸収されている.

特に $\omega > \gamma/2$ のとき $\mu = \sqrt{\omega^2 - (\gamma/2)^2}$ とおくと, $x_1(t), x_2(t)$ として $\exp\left(\frac{-\gamma \pm 2i\mu}{2}t\right)$ ととれる. これらを (6) に代入して整理すると、

$$x(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t f(s) e^{\frac{\gamma}{2}s} \sin(\mu(t-s)) ds$$

と書ける. $f(t) = (\text{定数}) \sin \nu t$ の場合に授業でやった特殊解が、この公式からも導かれることを確認しておこう.