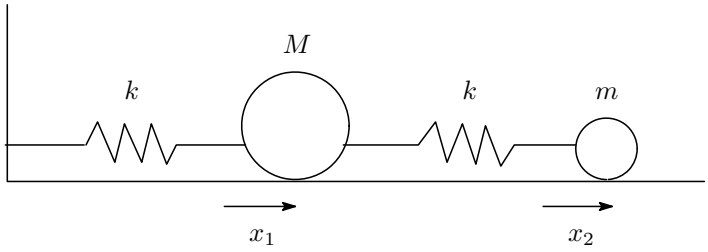
練習問題 4

図のような質量のおもりとばね定数をもったばねからなる連成振動系の微小振動を考える. 摩擦はないものとする.



(i) ばねが自然長にある場合の位置からの変位 x_1, x_2 に対する運動方程式をたてよ.

(ii) 基準振動数 ω を定める代数方程式を導け.

(iii) $M = 2m$ の場合に, 二つの基準振動を求め, 一般解をつくれ.

練習問題 4 の略解

(i) 二つのおもりに対する運動方程式はそれぞれ

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \quad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1)$$

ベクトルの記法を用いれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{2k}{M} & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 上の式に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\sin(\omega t + \phi)$$

を代入して $\sin(\omega t + \phi)$ をキャンセルすると

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

非自明な運動になるためにはこの行列が逆行列をもってはならない. 従ってその行列式を 0 とおいて

$$\omega^4 - \left(\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{k^2}{mM} = 0 \tag{2}$$

(iii) 以下 $M = 2m$ とし, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ という記号を用いる. (2) の解として基準振動数は

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}},$$

となる. それぞれに応じて (1) の α, β として

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\ (\omega = \omega_1 \text{ case}), \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\ (\omega = \omega_2 \text{ case}) \tag{3}$$

ととれる. (これらのゼロでないスカラー倍ならなんでもよい.) このような振幅パターンと振動数 ω_1, ω_2 を持つものが基準振動である. 一般解はこれらを重ね合わせることにより

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ \sqrt{2}A\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \sqrt{2}B\sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}$$

ここで, A, B, ϕ_1, ϕ_2 は定数で, 初期条件に応じて定められる.

$\omega_1 < \omega_2$ である. このことと (3) という揺れ方のパターンの対応が自然と思えるか, 直感にたずねてみよう.