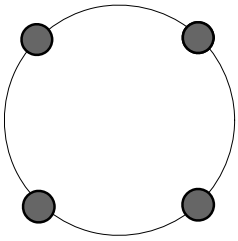
練習問題 5

図のように 4 個の質量 m の質点がばね定数 κ のばねで数珠つなぎになって, 円周に沿って運動する.

(i) この系の基準振動数を求め, 定常波の振動の様子を図示せよ.

(ii) 4 個の質点を $N(\geq 3)$ 個にした場合の基準振動数を求めよ.



解答例

(i) 左上の質点から時計回りに 1,2,3,4 と番号付けする．u_n を n 番目の質点の平衡位置からの変位とすると運動方程式は

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \kappa(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}). \tag{1}$$

ここで u_n は添え字について周期４，即ち $u_{n+4} = u_n$ と考える．定常波 $u_n = A_n \sin(\omega t + \beta)$ を仮定して, これを (1) に代入すると

$$A_{n-1} + \varepsilon A_n + A_{n+1} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

ここで $\varepsilon = \frac{m\omega^2}{\kappa} - 2$ とおいた．この方程式が自明でない解を持つためには次の方程式が成り立つ必要がある．（(2) をベクトルで表わしたとき，係数行列の行列式は 0 という条件）

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 4) = 0$$

この方程式の解は $\varepsilon_1 = 0$(重根), $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_0 = -2$ であり, これらに対応して基準振動数は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \omega_0 = 0.$$

$\omega = \omega_1$ のとき

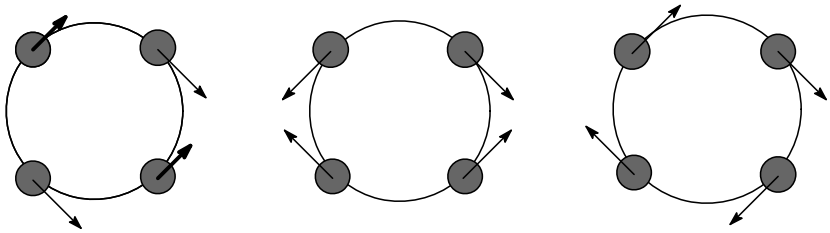
$$A_1 + A_3 = 0, \qquad A_2 + A_4 = 0$$

ここで A_1 と A_2 は独立にとれるが同時にはゼロでない.
$\omega = \omega_2$ のとき

$$A_1 = A_3 = -A_2 = -A_4 (\neq 0)$$

$\omega = \omega_0$ のとき

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 (\neq 0)$$



$\omega=\omega_1$　　$\omega=\omega_2$　　$\omega=\omega_0$

$\omega=\omega_1$ の場合には A_1 と A_2 の選び方に応じて２個の独立な振動パターンがあり，２個の基準振動に対応する.（例えば $(A_1,A_2)=(A,0),(0,A)$ ととった状況を想像してみよ.）$\omega=\omega_0=0$ の場合は時間に依存しない解であり，特別である．これは静止した平衡配置が，ばねが伸び縮みしないよう一斉に回転シフトしても再び平衡配置になるということを表わしている．このことを反映して，実は任意の速さ v で一斉に回転する運動 $u_n=b+vt$ も (1) の解になっていることに注意しよう．この解は $u_n=A\sin(\omega t+\beta)$ で $\omega\to\omega_0=0,\beta\to 0$ かつ $A\to\infty$ を $A\omega\to v, A\beta\to b$ とした極限として得られる.

(ii) $u_n=B\sin(\alpha n-\omega t+\varphi)$ という進行波を仮定して (1)（今度は u_n は添え字 n について周期 N と了解する) に代入すると

$$\omega=\pm 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3}$$

また周期的条件 $u_{N+n}=u_n$ より

$$\alpha=\frac{2\pi}{N}l,\qquad l=0,1,\ldots,N-1. \tag{4}$$

(3) と (4) から基準振動数は

$$\omega_l=2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{N}l\right),\qquad l=0,1,\ldots,N-1. \tag{5}$$

ここでも $\omega_0=0$ は一斉回転運動に対応する値で特別である．実際この場合，$u_n=B\sin(\alpha n-\omega t+\varphi)$ は $u_n=B\sin\varphi=$ 定数 となるが，上と同様にしてより一般に (1) は $u_n=b+vt$（b,v は任意定数）という解を持つ．一般解はこれと $l=1,\ldots,N-1$ 番目の基準振動を重ね合わせることにより

$$u_n=b+vt+\sum_{l=1}^{N-1}B_l\sin\Big(\frac{2\pi ln}{N}-\omega_l t+\varphi_l\Big)\qquad (B_l,\varphi_l \text{ は定数}) \tag{6}$$

と与えられる．なお，(3) によれば, $\sin\big(\frac{2\pi ln}{N}+\omega_l t+\varphi\big)$ も解になるが，$\omega_l=\omega_{N-l}$ に注意すると，これは (6) において l が $N-l$ になった項として既に取り入れられていることが判る.

一般解から l 番目の基準振動に対応する定常波を取り出してみよう．$B_l=-B_{N-l}(=A^{(l)}/2$ と書く), $\varphi_l=-\varphi_{N-l}(=\varphi$ と書く) と特殊化し，これ以外の B_j と b,v を全て 0 とすると

$$u_n=A_n\cos(\omega_l t),\quad A_n=A^{(l)}\sin\Big(\frac{2\pi ln}{N}+\varphi\Big),\qquad n=1,2,\ldots,N. \tag{7}$$

(5), (7) で，$N=4$ $(l=1,2,3)$ とすると (i) の結果 ($\omega=\omega_1,\omega_2$ の場合) を再現している．一方 (i) で $\omega=\omega_0$ の場合は (6) で全ての B_l を 0 とすれば得られる.