練習問題 6

(i) 長さ $L = 1\,\mathrm{m}$, 線密度 $\sigma = 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$ の鉄線の基本振動数をピアノの中央のラの音 (A 長調の主音 A_4) に調律したい. このとき何 kg 重の張力を加える必要があるか.

(ii) (i) の弦の基本振動数を半音だけ上げたい. 張力を変えないで全長 L で調律するならば何 cm 短くすればよいか.

(iii) また全長 L を変えないならば張力を何 kg 重増やせばよいか.

解答例

(i) 張力を T とする。弦の n 番目の基準振動の波長は $\lambda = 2L/n$ であるからその振動数は

$$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

であり、張力は

$$T = \left(\frac{2fL}{n}\right)^2 \sigma$$

で与えられる。基本振動は $n = 1$ に対応する．また，中央のラの振動数 $f = 440\,\mathrm{Hz}$ などの数値を代入すると

$$T = (2fL)^2\sigma = (2 \times 440 \times 1)^2 \times 10^{-3} = 774.4\,\mathrm{N} \simeq 79\,\mathrm{kg}\,\text{重}$$

人間がだすには相当大きな力であるが，そのような弦を２００本以上も張った状態に支えているのがピアノである．

(ii) 平均律で考えよう.（純正律で考えると答えは別である.）平均律では半音上げるごとに振動数を $2^{\frac{1}{12}}$ 増やす．従って半音あげた振動数を f' とすれば

$$\frac{f'}{f} = 2^{\frac{1}{12}} \simeq 1.05946$$

$f \propto \frac{\sqrt{T}}{L}$ であるから

$$\frac{L}{L'} = \frac{f'}{f} = 2^{\frac{1}{12}}$$

よって求める長さは

$$L - L' = L - 2^{-\frac{1}{12}}L \simeq 0.0561257\,\mathrm{m} \simeq 5.6\,\mathrm{cm}$$

(iii) (ii) と同様に考えると

$$\sqrt{\frac{T'}{T}} = \frac{f'}{f} = 2^{\frac{1}{12}}$$

よって求める張力の大きさの差は

$$T' - T = 2^{\frac{1}{6}}T - T \simeq 0.122462 \times 774.4 = 94.8346\,\mathrm{N} \simeq 9.7\,\mathrm{kg}\,\text{重}$$

最近の楽器はほとんどが平均律に調整されていてそれに聞き慣れているが，純正律に対する支持も根強い．音階，音程の理論は振動・波動論と接点があるので興味のあるひとは調べてみよう．