練習問題 7

1 次元の質点系の振動の運動方程式

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \frac{T}{a}(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) \tag{1}$$

から連続極限により弦の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left(v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\right) \tag{2}$$

が得られた.（但し弦の線密度は $\sigma = m/a$.）

方程式だけでなく，解についても同様のことが成立すること，即ち，(1) の解の連続極限が (2) の解を与えることを確認せよ.

解答例

(1) の解として，パラメータ $\alpha(>0), \varphi$ を持つ右向きの正弦的進行波

$$u_n(t) = A\cos(n\alpha - \omega(\alpha)t + \varphi), \qquad \omega(\alpha) = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

の場合を考察する．左向き進行波でも同様であり，一般解の場合もこれらの重ね合わせとして理解してよい．

連続極限は

$$a \to 0, \quad m \to 0, \quad n \to \infty, \quad \alpha \to 0 \tag{4}$$

である．((3) において，$\alpha \to 0$ としないと $n\alpha \to \infty$ となって意味ある極限とならないことに注意.）ただし，極限 (4) は

$$na = x, \quad \frac{m}{a} = \sigma, \quad \frac{\alpha}{a} = k \tag{5}$$

となるようにとる．ここで， x は弦に沿った空間座標であり，k はパラメータである．このとき (3) に現れる量は

$$\begin{aligned} n\alpha &= \frac{\alpha}{a}na \to kx, \\ \omega(\alpha) &\simeq 2\sqrt{\frac{T}{ma}}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{T}{\sigma a^2}}\alpha \to kv \end{aligned}$$

となるので，(3) の連続極限は

$$u_n(t) \to u(x,t) = A\cos\bigl(k(x - vt) + \varphi\bigr) \tag{6}$$

となる．これは確かに波動方程式 (2) の右向き正弦的進行波解（速さ v）である．