

練習問題 8

$x = 0$ を固定端とする半無限の弦に生じる波 $u(x, t)$ ($x \leq 0$) で、波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ および初期条件

$$u(x, 0) = h(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = w(x) \quad (x \leq 0) \quad (1)$$

を満たすものを求めよ．ここで $h(x), w(x)$ は $x \leq 0$ で定義された関数で、 $h(0) = w(0) = 0$ を満たす．

解答例

波動方程式の一般解は, $f(y), g(y)$ を任意関数として

$$u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt) \quad (2)$$

と与えられる. (ダランベールの解) 境界条件 $u(0, t) = 0$ を課すと $f(vt) + g(-vt) = 0$ が任意の t で成立しなければならないことから

$$f(y) = -g(-y) \quad (-\infty < y < \infty), \quad (3)$$

$$u(x, t) = g(x - vt) - g(-x - vt) \quad (4)$$

を得る. これで境界条件は取り入れられた. 残る作業は初期条件 (1) を満たすように $g(y)$ ($-\infty < y < \infty$) を定めることである. (4) を (1) に代入すると

$$g(x) - g(-x) = h(x) \quad (x \leq 0), \quad (5)$$

$$-vg'(x) + vg'(-x) = w(x) \quad (x \leq 0), \quad (6)$$

第二式を x_0 から x まで積分して

$$g(x) + g(-x) = -\frac{1}{v} \int_{x_0}^x w(y) dy + c \quad (x \leq 0) \quad (7)$$

ただし x_0, c は定数で $x_0 \leq 0$ である. ($w(y)$ は $y \leq 0$ でしか定義されていないから.) (7) と (5) から

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(h(x) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^x w(y) dy + c \right) \quad (x \leq 0), \quad (8)$$

$$g(-x) = \frac{1}{2} \left(-h(x) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^x w(y) dy + c \right) \quad (x \leq 0) \quad (9)$$

を得る. これで $g(y)$ ($-\infty < y < \infty$) が求まった. (9), (8) を統一して書くために

$$\tilde{h}(y) = \begin{cases} h(y) & y \leq 0 \\ -h(-y) & y \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

という関数を導入しよう. これは $x \leq 0$ でのみ定義されていた関数 $h(x)$ を奇関数となるように $-\infty < x < \infty$ へ拡張したものである. これを用いると (8), (9) は

$$g(y) = \frac{1}{2} \left(\tilde{h}(y) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^{-|y|} w(z) dz + c \right) \quad (-\infty < y < \infty) \quad (11)$$

と書ける. これを (4) に代入すれば最終的に初期値問題の解

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{h}(x - vt) + \tilde{h}(x + vt) - \frac{1}{v} \int_{-|x+vt|}^{-|x-vt|} w(y) dy \right) \quad (12)$$

が得られる. ただし $\tilde{h}(y)$ が奇関数であることを用いた. これは定数 x_0, c によらない.